Lycée B. Monastir	**Devoir de controle N :1**	$3^{ème}$ M_2
P.P. : ALI ZOUHAIER	Durée : 120 minutes	*10/11/2006*

Exercice 1 *(≈3 points)* *(temps ≈ 15 minutes)*

1/ Déterminer la valeur maximale de $f : x \mapsto -2(x-4)^2 + 65$

2/ Déterminer les valeurs de x tels que g(x) est maximale avec
$g : x \mapsto -2x^2 + 16|x| + 33$

Exercice 2 *(≈4 points)* *(temps ≈ 25 minutes)*

Soit la fonction $f : [-2;\ 7[\ \rightarrow IR;\ x \mapsto 3x^2 - 12x - 5$

1/**a**- Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = 3(x-a)^2 + b;\ \forall x \in [-2;\ 7[$

b- Déterminer le sens de variation de f sur des intervalles convenables.

2/ Donner un majorant et un minorant de f.

Exercice 3 *(≈4 points)* *(temps ≈ 25 minutes)*

Soit la fonction $f : x \mapsto -x^3 + 2x^2 + 10x - 1$

1/ Calculer $f(-3)$, $f(-1)$, $f(1)$ et $f(5)$.

2/ Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans IR.

3/ Désignons par α la racine de f dans $[1;\ 5]$.

Donner une valeur approchée par défaut de α à 0,5 près.

Exercice 4 *(≈4 points)* *(temps ≈ 25 minutes)*

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3-x}-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x > 2 \\ ax + 5 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$ avec a est un paramètre réel

1/ Montrer que f est définie sur $]-\infty;\ 3]$

2/ Justifier la continuité de f sur $]2;\ 3]$.

3/**a**- Calculer $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

b- Discuter suivant a la continuité de f en 2.

Exercice 5 *(≈5 points)* *(temps ≈ 30 minutes)*

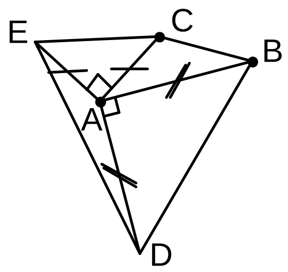
Dans la figure ci-contre :

ABC est un triangle tel que $\widehat{BAC}$ est aigu

$AB = AD$ et $(AD) \perp (AB)$

$AE = AC$ et $(AE) \perp (AC)$

1/**a**- Comparer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$.



b- En déduire que $(BE) \perp (CD)$ et que $BE = CD$.

2/ Désignons par M le milieu de [DE].

a- Montrer que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2.\overrightarrow{AM}$

b- Calculer $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}$ en déduire la position relative des droites (AM) et (BC).

Lycée B. Monastir	**Une Correction du**	$3^{ème}$ M_2
P.P. : ALI ZOUHAIER	**Devoir de contrôle N :1**	*10/11/2006*

EXERCICE 1 *(≈3 points)* *(temps ≈ 15 minutes)*

1/ $f(x) = -2(x-4)^2 + 65$ est maximale
$\Leftrightarrow$ $-2(x-4)^2$ est maximale car 65 est fixe
$\Leftrightarrow$ $(x-4)^2$ est minimale
$\Leftrightarrow$ $(x-4)^2 = 0$ car $(x-4)^2 \in IR^+$
$\Leftrightarrow$ $x = 4$

Conclusion : la valeur maximale de f est $f(4) = 65$.

2/ D'abord $g(x) = -2x^2 + 16|x| + 33 = -2(|x|^2 - 8|x|) + 33$

$$= -2\left[(|x|-4)^2 - 16\right] + 33$$
$$= -2(|x|-4)^2 + 65$$
$$= f(|x|)$$

- $g(x) = f(|x|)$ est maximale

$\Leftrightarrow$ $|x| = 4$ **d'après 1/**
$\Leftrightarrow$ $x = -4$ ou $x = 4$.

EXERCICE 2 *(≈4 points)* *(temps ≈ 25 minutes)*

1/a- $f(x) = 3x^2 - 12x - 5 = 3(x^2 - 4x) - 5 = 3\left[(x-2)^2 - 4\right] - 5 = 3(x-2)^2 - 17$

Donc $a = 2$ et $b = -17$.

b- • $-2 \leqslant x < y \leqslant 2 \Rightarrow x - 2 < y - 2 \leqslant 0$
$\Rightarrow (x-2)^2 > (y-2)^2$
$\Rightarrow 3(x-2)^2 > 3(y-2)^2$
$\Rightarrow f(x) = 3(x-2)^2 - 17 > 3(y-2)^2 - 17 = f(y)$

D'où f est décroissante sur $[-2; 2]$.

• $2 \leqslant x < y < 7 \Rightarrow 0 \leqslant x - 2 < y - 2$
$\Rightarrow (x-2)^2 < (y-2)^2$
$\Rightarrow 3(x-2)^2 < 3(y-2)^2$
$\Rightarrow f(x) = 3(x-2)^2 - 17 < 3(y-2)^2 - 17 = f(y)$

D'où f est croissante sur $[2; 7[$.

2/ ▲ $-2 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow \underbrace{f(-2)}_{31} \geqslant f(x) \geqslant f(2) = -17$ **car** f est ↘ sur $[-2; 2]$

Donc $\forall x \in [-2; 2]$ on a : $-17 \leqslant f(x) \leqslant 31$. (1)

▲ $\forall x \in [2; 7[$;
$\Rightarrow 2 \leqslant x < 7$
$\Rightarrow -17 = f(2) \leqslant f(x)$ **car** f est ↗ sur $[2; 7[$ (2)

Ainsi (1) et (2) $\Rightarrow \forall x \in [-2; 7[; \quad f(x) \geqslant -17$
C'est à dire f est minorée par -17.

▲ $2 \leqslant x < 7 \Rightarrow 0 \leqslant x - 2 < 7$
$\Rightarrow (x-2)^2 < 49$
$\Rightarrow \underbrace{3(x-2)^2 - 17}_{f(x)} < 3 \times 49 - 17 = 130$

Ainsi $\begin{cases} \forall x \in [-2;\ 2]; \quad f(x) \leqslant 31 & \textbf{d}'\text{après } (1) \\ \forall x \in [2;\ 7[;\ f(x) < 130 \end{cases}$

$\Rightarrow \forall x \in [-2;\ 7[; \quad f(x) < 130$

C'est à dire f est majorée par 130.

EXERCICE 3 *(≈4 points)* *(temps ≈ 25 minutes)*

1/ $f(-3) = -(-3)^3 + 2(-3)^2 + 10(-3) - 1 = 14$

$f(-1) = -(-1)^3 + 2(-1)^2 + 10(-1) - 1 = -8$

$f(1) = -1^3 + 2 \times 1^2 + 10 \times 1 - 1 = 10$

$f(5) = -5^3 + 2 \times 5^2 + 10 \times 5 - 1 = -26.$

2/

• $\begin{cases} \text{f est continue sur } [-3;\ -1] & (\text{ car f est un polynôme}) \\ f(-3) \times f(-1) = 14 \times (-8) = -112 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-3;\ -1]$

• $\begin{cases} \text{f est continue sur } [-1;\ 1] & (\text{ car f est un polynôme}) \\ f(-1) \times f(1) = 10 \times (-8) = -80 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-1;\ 1]$.

• $\begin{cases} \text{f est continue sur } [1;\ 5] & (\text{ car f est un polynôme}) \\ f(5) \times f(1) = 10 \times (-26) = -260 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[1;\ 5]$.

Ainsi $f(x) = 0$ admet trois solutions distincts

de plus f est un polynôme de degré 3 donc f admet au plus 3 racines

Conclusion: $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions.

3/

x	1	3	4	4,5	5
f(x)	10	20	7	-6,625	-26

• $\begin{cases} \text{f est continue sur } [4;\ 4,5] & (\text{ car c'est un polynôme}) \\ f(4) \times f(4,5) = 7 \times (-6,625) < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 4 < \alpha < 4,5$

Donc 4 est une valeur approchée par défaut de α à 0,5 près.

EXERCICE 4 *(≈4 points)* *(temps ≈ 25 minutes)*

1/ $f(x)$ existe si et seulement si $x \leq 2$ ou $\begin{cases} x > 2 \\ 3 - x \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x \in]-\infty;\ 2]$ ou $\begin{cases} x > 2 \\ 3 \geqslant x \\ x \neq 1 \text{ et } x \neq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x \in]-\infty;\ 2]$ ou $x \in]2;\ 3]$

$\Leftrightarrow \quad x \in]-\infty;\ 3]$.

Conclusion : f est définie sur $]-\infty;\ 3]$.

2/

$\begin{cases} \text{la fonction } (x \mapsto 3-x) \text{ est continue sur }]2;\ 3] \text{ (car c'est un polynôme)} \\ \forall x \in]2;\ 3];\ 3-x \geqslant 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ la fonction $\left(x \mapsto \sqrt{3-x}\right)$ est continue sur $]2;\ 3]$

$\Rightarrow$ la fonction $\left(x \mapsto \sqrt{3-x}-1\right)$ est continue sur $]2;\ 3]$

De plus la fonction $(x \mapsto x^2-3x+2)$ est continue et elle ne s'annule par sur $]2;\ 3]$

D'où la fonction $f:\ x \mapsto \dfrac{\sqrt{3-x}-1}{x^2-3x+2}$ est continue sur $]2;\ 3]$.

3/a- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{3-x}-1}{x^2-3x+2}$ car $\forall x \in]2;\ 3];\ \dfrac{\sqrt{3-x}-1}{x^2-3x+2}$

Or $\forall x \in]2;\ 3];\ \dfrac{\sqrt{3-x}-1}{x^2-3x+2} = \dfrac{\left(\sqrt{3-x}-1\right)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}{(x^2-3x+2)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}$

$$= \frac{\sqrt{3-x}^{\,2}-1^2}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}$$

(car 1 et 2 sont les solutions de $x^2-3x+2=0$)

$$= \frac{2-x}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)\left(\sqrt{3-x}+1\right)} \quad \textbf{car} \quad x-2 \neq 0;\ \forall x \in]2;\ 3]$$

Or $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-1}{(x-1)\left(\sqrt{3-x}+1\right)} = -\dfrac{1}{2}$.

Par suite $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

b-
- $f(2) = a \times 2 + 5 = 2a+5$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (ax+5) = 2a+5$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \quad \Leftrightarrow \quad 2a+5 = -\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 2a = -\frac{11}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = -\frac{11}{4}$$

Bilan de discution:

Si $a = -\dfrac{11}{4}$ **alors** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$

signifie que f est continue en 2.

Si $a \neq -\dfrac{11}{4}$ **alors** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$

donc f n'est pas continue en 2.

EXERCICE 5 *(≈5 points)* *(temps ≈ 30 minutes)*

....